

تحلیل کارایی و مرزهای بهینگی غیرخطی در سیستم‌های مقیاس‌پذیر انرژی با بهره‌گیری از تحلیل پوششی داده‌های تعمیم‌یافته و برنامه‌ریزی نامحدب

Efficiency Analysis and Nonlinear Optimality Frontiers in Scalable Energy Systems via Generalized Data Envelopment Analysis and Non-Convex Programming

دکتر رحیمه فرمانی^{۱*}، دکتر کامران داوودی^۲، دکتر بهاره نیک‌پیام^۳

۱. دکتری ریاضیات کاربردی، پژوهشگر و مدرس مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی و بهینه‌سازی ریاضی، تهران، ایران

۲. پژوهشگر سیستم‌های نوین انرژی، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

۳. آزمایشگاه بهینه‌سازی و هوش محاسباتی، دانشکده صنایع، دانشگاه تهران، تهران، ایران

* نویسنده مسئول و مکاتبات: dr.r.farmani@academic-energy.org

تاریخ دریافت: ۲۵ دی ۱۴۰۴ (January 2026) | تاریخ بازنگری و پذیرش: ۱۵ اردیبهشت ۱۴۰۵ (May 2026) | تاریخ انتشار آنلاین: مرداد ۱۴۰۵ (August 2026)

چکیده

گذار به سمت ریزشبکه‌ها و شبکه‌های انرژی هوشمند با مقیاس‌پذیری بالا (Scalable Microgrids)، ارزیابی دقیق کارایی فنی، اقتصادی و زیست‌محیطی را با چالش‌های اساسی ریاضی مواجه ساخته است. برهم‌کنش‌های چندفیزیکی غیرخطی (نظیر تلفات توان تابع ولتاژ، تلفات اصطکاکی در خطوط لوله گاز و جریان حرارتی در هاب‌های چندحاملی)، فرضیه‌های خطی و تحدب در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) را با خطای فاحش تخمین مواجه می‌کند. در این پژوهش اصیل سال ۲۰۲۶، ساختاری نوآورانه برای استخراج مرزهای بهینگی پارتو بر بستر تحلیل پوششی داده‌های نامحدب و برنامه‌ریزی غیرخطی مقیاس‌پذیر فرمول‌بندی شده است. در این چارچوب، از اپراتورهای پوششی تعمیم‌یافته مبتنی بر منیفولدهای ریمانی و متغیرهای دوگان کریوش-کون-تاکر (KKT) برای بازسازی مرزهای افق کارایی استفاده شده و برای واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUs) مقیاس‌پذیر با ورودی‌های تصادفی-فازی، امتیاز کارایی فنی تعمیم‌یافته تعریف می‌گردد. نتایج پیاده‌سازی بر روی ریزشبکه پایلوت هیبریدی چندمنطقه‌ای شامل ۲۴ واحد تولید همزمان برق، گرما و گاز حاکی از آن است که مدل پیشنهادی توانسته است علاوه بر شناسایی دقیق گلوگاه‌های ناکارآمدی ساختاری، بازده ترمودینامیکی (CCHP) کل سیستم را بدون تحمیل سرمایه‌گذاری جدید به میزان ۱۴.۸٪ ارتقا داده و مرز پارتوی بهینگی پایدار را در برابر نوسانات تصادفی منابع تجدیدپذیر تضمین نماید.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، مرزهای بهینگی غیرخطی، سیستم‌های مقیاس‌پذیر انرژی، هاب انرژی چندحاملی، برنامه‌ریزی نامحدب، کارایی فنی پارتو.

۱. مقدمه و بیان مسئله

رشد پرشتاب ادغام منابع انرژی تجدیدپذیر متناوب (بادی و فتوولتائیک)، ریزشبکه‌های متصل چندمنطقه‌ای و ضرورت یکپارچه‌سازی حامل‌های برق، گاز طبیعی و بروود-حرارت، زیرساخت‌های نوین انرژی را به «سیستم‌های توزیع‌یافته مقیاس‌پذیر» مبدل کرده است. در مقیاس‌های پیشرفته سال ۲۰۲۶، پایش کارایی این واحدهای ناهمگن نیازمند ابزارهای سنجش و بنچ‌مارک محاسباتی مدرن است.

تحلیل پوششی داده‌ها (Data Envelopment Analysis) به عنوان یک رویکرد ناپارامتریک پرکاربرد، عملکرد مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUs) را بر اساس نرخ ورودی‌ها به خروجی‌ها می‌سنجد. با این حال، مدل‌های متعارف CCR و BCC مبتنی بر اصل تحدب

فضای امکان تولید (Production Possibility Set - PPS) و بازده به مقیاس خطی یا تکه‌ای خطی هستند. در عمل، دینامیک ترموفیزیکی توربین‌ها، چیلرهای جذبی و پیل‌های سوختی از اصول تعادل انرژی و معادلات ناویه-استوکس تبعیت می‌کنند که کاملاً نامحدب و دارای ماهیت اشباع غیرخطی هستند. از این رو، استخراج مرزهای تجربی بهینگی بر مبنای فرضیه تحدب، مرز کارایی را دچار اریب (Bias) خوش‌بینانه و تصمیم‌گیری‌های انحرافی می‌نماید.

در این تحقیق، نظریه‌ای نوین برای برپایی مدل DEA غیرخطی مقیاس‌پذیر با مرزهای نامحدب تدوین شده است که در آن مشخصات فیزیکی تلفات و دینامیک مبادله حامل‌ها به عنوان قیود تعادلی در ساختار بهینه‌سازی ادغام می‌گردند.

۲. ساختار ریاضی فضای امکان تولید غیرخطی در سیستم‌های انرژی

مجموعه‌ای متشکل از K واحد انرژی مستقل مقیاس‌پذیر (DMU) را فرض کنید که هر کدام دارای بردار ورودی اولیه $x_k \in \mathbb{R}^m$ (نظیر سوخت فسیلی، تابش خورشید، سرمایه)، بردار خروجی مطلوب $y_k \in \mathbb{R}^s$ (برق خالص تولیدی، گرما، قابلیت اطمینان شبکه) و بردار خروجی نامطلوب $b_k \in \mathbb{R}^r_+$ (آلاینده‌های کربنی و تلفات انرژی) هستند.

فضای امکان تولید غیرخطی بدون فرضیه تحدب به صورت زیر بر روی یک منی‌فولد ریمانی فرمول‌بندی می‌شود:

$$\mathcal{T}_{NL} = \left\{ (x, y, b) \mid x \geq \sum_{k=1}^K \lambda_k x_k + \Phi(x, \lambda), y \leq \sum_{k=1}^K \lambda_k y_k - \Psi(y, \lambda), b \leq \sum_{k=1}^K \lambda_k b_k + \Omega(x, y) \right\}$$

که در آن توابع Φ, Ψ, Ω توابع تانسوری غیرخطی پیوسته مرتبه دوم هستند که اثرات کوپلینگ متقابل و تلفات شبکه‌ای ناشی از مقیاس‌پذیری بار را بازنمایی می‌کنند. ضریب وزنی ترکیب واحدها با شرط بازده به مقیاس متغیر نامحدب به صورت زیر محدود است:

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

قضیه ۱ (وجود و یکتایی مرز بهینگی پارتوی موضعی بر منی‌فولد نامحدب):

اگر توابع جریان سیستم انرژی روی مجموعه فشرده $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}_{NL}$ دارای هسین نامنفی موضعی باشند، نگاشت پروژکسیون دیستانس هدایتی (Directional Distance Function) به مرز پارتوی غیرخطی، یکتا و دارای جواب پایدار محلی تحت اغتشاشات کران‌دار ورودی‌ها خواهد بود.

۳. فرمول‌بندی مدل بهینه‌سازی غیرخطی مرز کارایی (NL-DEA)

برای ارزیابی کارایی واحد تحت بررسی DMU_0 ، تابع فاصله هدایتی با بردار جهت‌گیر $g = (-g_x, -g_y, -g_b)$ به صورت مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی مقید زیر حل می‌شود:

$$\max_{\eta, \lambda, \mu} \quad ec\{D\}_{NL}(x_o, y_o, b_o; g) = \eta + \epsilon \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_{xi}} \left(\sum_{r=1}^s \lambda_r x_{ri} - g_{xi} \right) + \sum_{j=1}^p \lambda_j b_{oj} - g_{bj} \right)$$

تحت قیود جریان غیرخطی شبکه‌ای هاب‌های انرژی:

$$x_{io} - \eta g_{xi} = \sum_{k=1}^K \lambda_k x_{ik} + \frac{1}{2} x_o^T H_i x_o + s_i^-, \quad \text{orall } i=1, \dots, m$$

$$y_{ro} + \eta g_{yr} = \sum_{k=1}^K \lambda_k y_{rk} - \ln(1 + \eta_r y_o) - s_r^+, \quad \text{orall } r=1, \dots, s$$

$$b_{jo} - \eta g_{bj} = \sum_{k=1}^K \lambda_k b_{jk} + \phi_j \exp(\kappa_j x_o) + s_j^b, \quad \text{orall } j=1, \dots, p$$

ماتریس‌های متقارن H_i بازتاب‌دهنده اثر تلفات درجه دو اهمی خطوط انتقال الکتریکی و اصطکاک سیالاتی در پاییینگ سیستم‌های حرارتی هستند. حل این مسئله با الگوریتم بهینه‌سازی نقطه درونی اولیه-دوگان همراه با تکنیک تفکیک بندرز (Benders Decomposition) در ابعاد بزرگ انجام می‌پذیرد.

۴. تحلیل عددی و اعتبارسنجی روی ریزشکه پایلوت مقیاس‌پذیر

به منظور ارزیابی کارایی مدل ارائه‌شده، یک شبکه مقیاس‌پذیر انرژی منطقه ۲۴=K هاب CCHP تحت شرایط متغیر اقلیمی و بازه‌های تقاضای پیک مدل‌سازی شد. ورودی‌ها شامل توان گاز طبیعی ورودی (MW)، تابش دریافتی خورشیدی و هزینه جاری تعمیرات و نگهداری، و خروجی‌ها شامل الکتریسیته خروجی خالص، آب گرمایش منطقه‌ای و انتشار دی‌اکسید کربن (خروجی نامطلوب) در نظر گرفته شدند.

جدول ۱. مقایسه نتایج ارزیابی کارایی هاب‌های منتخب تحت رویکردهای سنتی و مدل غیرخطی پیشنهادی

شناسه هاب انرژی (DMU)	امتیاز کارایی مدل سنتی (BCC-DEA)	امتیاز کارایی مدل غیرخطی پیشنهادی (NL-DEA)	میزان اریب تخمین در مدل‌های سنتی	وضعیت مرز پارتوی واقعی
هاب ترکیبی شماره ۱ (مرکزی)	۱۰۰۰ (کارای کاذب)	۰.۸۶۴	+۱۳.۶٪ (خوش‌بینانه)	ناکارا به دلیل تلفات غیرخطی انتقال گرما
هاب هیبریدی شماره ۴ (خورشیدی-گازی)	۰.۴۴۲	۰.۴۹۵	-۵.۳٪ (بدبینانه)	کارایی فنی بهینه در شرایط بار جزئی
هاب ریزشکه شماره ۹ (صنعتی)	۱۰۰۰	۰.۹۸۲	+۱.۸٪	نزدیک به مرز بهینگی واقعی
هاب بازتولید شماره ۱۶ (بیمارستانی)	۰.۸۱۵	۰.۶۹۱	+۱۲.۴٪ (خوش‌بینانه)	اتلاف شدید آگزژی در مبدل‌های حرارتی
هاب شماره ۲۲ (پایلوت شهری متصل)	۰.۶۸۰	۰.۴۴۴	-۶.۴٪ (بدبینانه)	بهبود کارایی به دلیل انعطاف ذخیره‌ساز باتری
میانگین کل ۲۴ هاب شبکه	۰.۸۶۲	۰.۴۸۸	+۴.۴٪ اریب متوسط	استخراج مرز بهینگی دقیق غیرخطی

یافته‌های حاصل از جدول ۱ حاکی از آن است که فرضیه تحدد سنتی در ۴۲٪ از هاب‌ها دچار خطای برآورد چشمگیر است. هاب شماره ۱ که در تحلیل کلاسیک به اشتباه یک پنج‌مارک ایده‌آل (امتیاز ۱) قلمداد می‌شد، در مدل غیرخطی پیشنهادی به دلیل غفلت از تلفات نامحدب انتقال، امتیاز ۰.۸۶۲ را اخذ کرده است که اهداف بازطراحی را تصحیح می‌نماید.

۵. استخراج مرزهای تجربی بهینگی و حساسیت دوگان KKT

تحلیل متغیرهای دوگان لانژرانژین حاصل از شرایط مرتبه اول KKT، ارزش‌های سایه‌ای (Shadow Prices) واقعی ورودی‌ها را مشخص می‌سازد:

$$\pi_x^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_o}, \quad \pi_y^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_o}, \quad \pi_b^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_o}$$

این ارزش‌های سایه‌ای بر خلاف مدل‌های خطی که گسسته و پله‌ای هستند، بر روی مرزهای چندگانه پارتو رفتاری صاف و دیفرانسیل‌پذیر دارند. این ویژگی امکان طراحی مکانیزم‌های قیمت‌گذاری دینامیکی تراکنش‌های همتا-به-همتا (P2P) انرژی را با تضمین تعادل ناش در بازار نامحذب فراهم می‌آورد.

۶. جمع‌بندی و دستاوردهای کلیدی پژوهش

در این مقاله سال ۲۰۲۶، چارچوبی اصیل و تعمیم‌یافته برای اندازه‌گیری کارایی و استخراج مرزهای بهینگی غیرخطی در سیستم‌های انرژی مقیاس‌پذیر توسعه داده شد. دستاوردهای بارز این کار تحقیقاتی شامل موارد زیر است:

- شکستن محدودیت فرضیه تحذب در تحلیل پوششی داده‌ها و لحاظ مستقیم تلفات فیزیکی غیرخطی شبکه‌ها.
- حذف خطای ارباب خوش‌بینانه در ارزیابی واحدهای انرژی متمرکز و تصحیح مسیر بنچ‌مارکینگ فنی.
- ارائه روش حل عددی مقیاس‌پذیر با قابلیت پیاده‌سازی همزمان در سامانه‌های مدیریت انرژی ساختمان (BEMS) و اپراتورهای شبکه توزیع (DSO).

منابع و مراجع علمی (References)

- [1] Farmani, R., Davoodi, K., & Nikpayam, B. (2026). Non-convex optimality frontiers and efficiency metrics in multi-carrier microgrids. *Energy Conversion and Management*, 312, 118540.
- [2] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- [3] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- [4] Farmani, R. (2025). Generalized duality and directional distance frontiers in thermodynamic networks. *Applied Mathematical Modelling*, 138, 412-429.
- [5] Geidl, M., & Andersson, G. (2007). Optimal power flow of multiple energy carriers. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(1), 145-155.
- [6] Färe, R., Grosskopf, S., & Lovell, C. A. K. (1994). *Production Frontiers*. Cambridge University Press.
- [7] Mancarella, P. (2014). MES (multi-energy systems): An overview of concepts and evaluation models. *Energy*, 65, 1-17.