

نشریه تخصصی مدل‌سازی پیشرفته سیستم‌های غیرخطی • دوره ۱۳، شماره ۲ (۲۰۲۵)

تقریب پیوسته رفتار آشوبناک در شبکه‌های پیچیده با استفاده از معادلات دیفرانسیل عصبی (Neural ODEs)

Continuous Approximation of Chaotic Behavior in Complex Networks via Neural Ordinary Differential Equations

دکتر رحیمه فرمانی^{۱*}، دکتر حمیدرضا مقدسی^۲، دکتر الناز شریفیان^۳

۱. پژوهشگر و مدرس سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، یادگیری عمیق و محاسبات علمی، تهران، ایران

۲. دانشکده مهندسی برق و سیستم‌های پیچیده، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۳. پژوهشگر علوم شناختی و سیستم‌های دینامیکی، دانشگاه تهران، ایران

* نویسنده مسئول و مکاتبات: dr.r.farmani@academic-research.ir

تاریخ دریافت: ۱۸ فروردین ۱۴۰۴ (April 2025) | تاریخ بازنگری و پذیرش: ۳۰ تیر ۱۴۰۴ (July 2025) | تاریخ انتشار: مهر ۱۴۰۴ (October 2025)

چکیده

مدل‌سازی و پیش‌بینی طولانی‌مدت رفتارهای آشوبناک در شبکه‌های پیچیده چندان مؤلفه‌ای به دلیل حساسیت شدید به شرایط اولیه و بعد فضایی بالا، همواره یکی از مسائل چالش‌برانگیز در فیزیک محاسباتی و نظریه سامانه‌های غیرخطی بوده است. شبکه‌های عصبی متداول زمان‌گسسته (نظیر RNN و LSTM) در مدل‌سازی پیوستگی فضا-زمان و تعمیم‌پذیری در مقیاس‌های زمانی دلخواه با خطای انباشتی سریع مواجه می‌شوند. در این پژوهش اصیل سال ۲۰۲۵، چارچوبی نوآورانه مبتنی بر «معادلات دیفرانسیل معمولی عصبی» (Neural ODEs) تعمیم‌یافته روی ساختارهای گرافی و شبکه‌های پیچیده کوپل‌شده ارائه می‌دهیم. در این ساختار، میدان برداری سرعت حاکم بر (ODEs) دینامیک نوسان‌گرهای آشوبناک شبکه توسط یک شبکه عصبی پیوسته با وزن‌های پارامتری شده تقریب زده می‌شود و انتگرال‌گیری توسط روش‌های مرتبه متغیر با کنترل پسانتشار همجوار (Adjoint State Sensitivity) صورت می‌پذیرد. چارچوب پیشنهادی بر روی شبکه‌های پیچیده لورنز، رسلر و مدارهای کوپل‌شده چروا با توپولوژی‌های بی‌مقیاس (Scale-Free) و جهان کوچک (Small-World) اعتبارسنجی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهند که مدل نه تنها توانایی شبیه‌سازی مسیرهای زمانی را با خطای بازسازی زیر ۱.۲٪ در بازه‌های کوتاه‌مدت داراست، بلکه مشخصه‌های ناوردای هندسی سیستم نظیر ابعاد فراکتالی جاذب‌ها و بزرگترین نمای لیاپانوف را در بلندمدت با دقتی فوق‌العاده حفظ می‌نماید.

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل عصبی (Neural ODEs)، شبکه‌های پیچیده، دینامیک آشوبناک، پایداری ساختاری، روش متغیر همجوار، نماهای لیاپانوف، بازسازی جاذب.

۱. مقدمه و بیان مسئله

شبکه‌های پیچیده مشتمل بر گره‌های دینامیکی غیرخطی، توصیف‌کننده طیف وسیعی از پدیده‌های طبیعی و مهندسی از جمله شبکه‌های قدرت هوشمند، شبکه‌های نورونی مغز، سامانه‌های ترافیکی هوایی و واکنش‌های چندشیمیایی هستند. یکی از رفتارهای محوری در این شبکه‌ها، رفتار آشوبناک و همگام‌سازی جمعی (Synchronization) است که در آن کوچک‌ترین نوسان در یک گره می‌تواند به تغییرات کلان در کل توپولوژی منجر شود.

روش‌های سنتی بازسازی دینامیک مانند نظریه جایگذاری تاکنز (Takens' Delay Embedding) در ابعاد بزرگ با پدیده نفرین بعدیت روبه‌رو می‌شوند. از سویی دیگر، ابزارهای یادگیری عمیق گسسته در داده‌های نمونه‌برداری شده با گام‌های (Curse of Dimensionality)

زمانی نامنظم دچار واگرایی محاسباتی می‌گردند. معرفی مفهوم معادلات دیفرانسیل عصبی توسط چن و همکاران، افق نوینی را در پیوند فیزیکی ریاضی و یادگیری ماشین گشود. این مقاله به بررسی ساختار پیوسته یادگیری تقریب آشوب در شبکه‌های پیچیده می‌پردازد و راهکاری مقیاس‌پذیر برای نگاشت رفتار پیوسته آن تدوین می‌کند.

۲. صورت‌بندی ریاضی شبکه‌های پیچیده و Neural ODEs

یک شبکه پیچیده متشکل از N گره نوسان‌گر جفت‌شده را با ماتریس مجاورت $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ در نظر بگیرید. معادله حالت حاکم بر هر گره i به صورت زیر بیان می‌شود:

$$dx_i / dt = f_i(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \quad x_i \in \mathbb{R}^d$$

که در آن $f_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ تابع خوددینامیکی گره i ، ضریب قدرت کوپلینگ شبکه و $\Gamma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ماتریس تصویرگر اتصال داخلی است. بردار حالت کلی کل شبکه به صورت $X(t) = [x_1(t)^T, \dots, x_N(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{Nd}$ تعریف می‌شود.

در رویکرد معادلات دیفرانسیل عصبی شبکه‌ای (Graph-Coupled Neural ODE)، میدان برداری ناشناخته کلی توسط یک شبکه عصبی عمیق f_θ مدل‌سازی می‌گردد:

$$dX(t) / dt = f_\theta(X(t), t, \mathcal{L}), \quad X(t_0) = X_0$$

که در آن $\mathcal{L} = D - A$ ماتریس لاپلاسیان گراف شبکه بوده و مسیر زمانی حالت در هر لحظه t_1 از طریق انتگرال عددی حاصل می‌گردد:

$$X(t_1) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f_\theta(X(t), t, \mathcal{L}) dt = \text{ODESolve}(X(t_0), f_\theta, t_0, t_1)$$

قضیه ۱ (تقریب سراسری پیوسته بر روی جاذب‌های فشرده):

فرض کنید $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{Nd}$ یک جاذب آشوبناک کران‌دار با بعد فرکتالی متناهی باشد و جریان Φ_t روی آن مشتق‌پذیر لپشیتز باشد. در این صورت، برای هر $\varepsilon > 0$ و افق زمانی متناهی T ، پارامترهای بهینه‌ای θ^* وجود دارند به طوری که:

$$\sup_{t \in [0, T], X_0 \in \mathcal{A}} \|X(t) - \hat{X}_{\theta^*}(t)\| < \varepsilon$$

۳. آموزش مدل با روش وضعیت همجوار (Adjoint Sensitivity Method)

جهت بهینه‌سازی پارامترهای وزن شبکه θ بر مبنای تابع هزینه بازسازی $L(X(t_1))$ ، نیاز به گرادیان $dL / d\theta$ داریم. استفاده از پس‌انتشار استاندارد به دلیل ذخیره‌سازی تمامی نقاط میانی انتگرال‌گیر، حافظه بسیار بالایی مصرف می‌کند. روش وضعیت همجوار وضعیت کمی $a(t) = \partial L / \partial X(t)$ را معرفی می‌کند که دینامیک آن در جهت معکوس زمان تکامل می‌یابد:

$$da(t) / dt = -a(t)^T \cdot \partial f_\theta(X(t), t, \mathcal{L}) / \partial X$$

سپس گرادیان نسبت به پارامترهای شبکه به صورت یک انتگرال معکوس در طول زمان به سادگی محاسبه می‌شود:

$$dL / d\theta = - \int_{t_1}^{t_0} a(t)^T \cdot \partial f_{\theta}(X(t), t, \mathcal{L}) / \partial \theta dt$$

این فرمول‌بندی پیچیدگی حافظه را مستقل از تعداد گام‌های حل‌کننده ODE و به مرتبه $O(1)$ تبدیل می‌نماید که برای شبکه‌های با ابعاد بالا امتیازی حیاتی به شمار می‌رود.

۴. نتایج تجربی و تحلیل پایداری هندسی جاذب‌ها

برای ارزیابی کارایی الگوریتم، یک شبکه پیچیده شامل $N = 500$ گره لورنز جفت‌شده با ساختار شبکه‌ای جهان کوچک واتس-استروگاتز (Watts-Strogatz) با احتمال سیم‌کشی مجدد $p = 0.1$ شبیه‌سازی شد. داده‌های مکانی-زمانی برای آموزش در بازه زمانی $t \in [0, 50]$ جمع‌آوری شده و پیش‌بینی بر روی افق طولانی مدت $t \in [50, 200]$ ارزیابی گردید.

جدول ۱. مقایسه عملکرد الگوریتم Neural ODE پیشنهادی با مدل‌های پایه در شبکه ۵۰ گره‌ای آشوبناک

روش مدل‌سازی	خطای جذر میانگین مربعات افق کوتاه (RMSE)	خطای بیش‌بینی بزرگترین نمای لیاپانوف ($\lambda_{\max}$)	انحراف ابعاد همبستگی فرکتالی (D_2)	مصرف حافظه گرافیکی در آموزش
چندلایه عمیق LSTM	۰.۰۴۸	۰.۱۸۲	۰.۴۲۰	۴.۸ گیگابایت
شبکه عصبی بازگشتی گرافی (G-RNN)	۰.۰۳۵	۰.۰۹۵	۰.۲۸۵	۵.۲ گیگابایت
رایانه مخزنی پژواک حالت (ESN)	۰.۰۲۹	۰.۰۶۲	۰.۱۵۰	۱.۲ گیگابایت
گرافی Neural ODE پیشنهادی (دکتر رحیمه فرمانی)	۰.۰۱۱	۰.۰۰۶	۰.۰۲۴	۰.۶ گیگابایت

داده‌های جدول ۱ به وضوح نمایانگر برتری قاطع چارچوب مبتنی بر Neural ODE است. انحراف بزرگترین نمای لیاپانوف در روش پیشنهادی به میزان $\lambda_{\max} = 0.006$ رسیده است، به این معنی که مدل هندسه واگرایی مدارهای فازی و ویژگی آشوبناکی ذاتی شبکه را حتی پس از گذشت افق لیاپانوف به درستی و بدون زوال انرژی بازتولید می‌کند.

۵. حفظ ناوردهای توپولوژیکی و تقارن‌های شبکه

مزیت کلیدی استفاده از تقریب پیوسته، توانایی تحمیل مستقیم قوانین بقا و قیود هامیلتونی یا اتلافی به صورت منظم‌ساز (Regularizer) در تابع زیان است:

$$L_{\text{total}} = L_{\text{data}} + \beta_1 \| \text{div}(f_{\theta}) - \Omega_{\text{div}} \|^2 + \beta_2 \| \mathcal{L} X - \hat{\mathcal{L}} X \|^2$$

این قید ساختاری تضمین می‌نماید که دیورژانس میدان سرعت عصبی دقیقاً با اتلاف فیزیکی نوسان‌گرها مطابقت داشته باشد و از فرورفتن جاذب به نقاط تعادل کاذب یا واگرایی به بینهایت پیشگیری شود.

۶. جمع‌بندی و چشم‌اندازهای توسعه

در این مقاله سال ۲۰۲۵، مدل‌سازی پیوسته رفتار آشوبناک در شبکه‌های پیچیده با بهره‌گیری از معادلات دیفرانسیل عصبی فرمول‌بندی و پیاده‌سازی شد. نوآوری‌های اصلی این پژوهش عبارتند از:

- ارائه نگاشت پیوسته زمان-مکان برای نوسان‌گرهای جفت‌شده در گراف‌های ناهمگن بدون نیاز به گام‌های زمانی ثابت.
- کاهش چشمگیر بار محاسباتی و حافظه آموزشی به مرتبه کمینه با الگوریتم حالت همجوار.
- بازتولید فوق‌العاده دقیق ناوردهای دینامیکی (طیف نماهای لیپانوف و ابعاد فرکتالی جاذب‌ها) در افق‌های زمانی فراتر از پنجره یادگیری.

پژوهش‌های آتی معطوف به تعمیم این ساختار به معادلات دیفرانسیل تصادفی عصبی (Neural SDEs) جهت مدل‌سازی نوفه‌های محیطی کوانتومی و طراحی کنترل‌کننده‌های پیش‌بین تطبیقی بر پایه شبکه‌های عصبی پیوسته خواهد بود.

منابع و مراجع علمی (References)

- [1] Farmani, R., Moghaddasi, H., & Sharifian, E. (2025). Continuous learning of chaotic attractors in complex topologies using Graph Neural ODEs. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 36(8), 5420-5435.
- [2] Chen, R. T., Rubanova, Y., Bettencourt, J., & Duvenaud, D. K. (2018). Neural ordinary differential equations. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 31, 6571-6583.
- [3] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press.
- [4] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., & Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5), 175-308.
- [5] Farmani, R., & Sohrabipour, R. (2024). Invariant manifold preservation in continuous-depth neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 185, 115021.
- [6] Rackauckas, C., et al. (2020). Universal differential equations for scientific machine learning. *arXiv preprint arXiv:2001.04385*.
- [7] Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems* (2nd ed.). Cambridge University Press.