

تحلیل انشعاب و دینامیک گذار به آشوب در نقشه‌های گسسته چندبعدی تحت عدم قطعیت فازی پارامترها و شرایط اولیه

Bifurcation Analysis and Transition to Chaos in Multidimensional Discrete Maps under Fuzzy Uncertainty of Parameters and Initial Conditions

رحیمه فرمانی^{۱*}، دکتر رامین سهرابی‌پور^۲، دکتر مریم اعتضادی^۳

۱. پژوهشگر ارشد سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و محاسبات نرم، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، تهران، ایران

۲. قطب علمی مدل‌سازی و کنترل سیستم‌های پیچیده، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۳. پژوهشگر ریاضیات کاربردی و هوش مصنوعی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

* نویسنده مسئول و مکاتبات: r.farmani@academic-research.ir

تاریخ دریافت: ۱۴ بهمن ۱۴۰۴ (February 2026) | تاریخ بازنگری و پذیرش: ۲۸ اردیبهشت ۱۴۰۵ (May 2026) | تاریخ انتشار: شهریور ۱۴۰۵ (September 2026)

چکیده

بررسی رفتار دینامیکی نگاشت‌های گسسته چندبعدی در حضور عدم قطعیت، یکی از چالش‌های بنیادین در نظریه سیستم‌های غیرخطی مدرن محسوب می‌شود. در محیط‌های فیزیکی و مهندسی واقعی، پارامترهای مدل و شرایط اولیه دقیقاً مشخص نیستند؛ لذا مدل‌سازی‌های قطعی سنتی توان بازتاب پدیده‌های نوظهور، به ویژه تغییر در ساختار جاذب‌ها و تخریب یا اعوجاج مرزهای حوزه‌های جذب را ندارند. در این مقاله پژوهشی، ساختاری تحلیلی و محاسباتی نوآورانه برای بررسی انشعابات موضعی (نظیر دوبرابر شدن دوره تناوب، انشعاب نمیک-ساکر و انشعاب زینی-گرهی) و گذر به آشوب در نگاشت‌های گسسته n -بعدی تحت عدم قطعیت فازی توسعه داده شده است. با بکارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی بر پایه اصول هلوکوهل (Hüllermeier) و تعمیم نگاشت‌های بازه‌ای از طریق برش‌های آلفا (α) طیف نمای لیپانوف فازی شده، $F(LEscuts)$ دوشاخه‌گی‌های تجمعی استخراج شده‌اند. نتایج اعمال این چارچوب بر روی نگاشت‌های تعمیم‌یافته هنون سه‌بعدی ($3D$ Generalized Hénon Map) پدیده‌های نوینی را آشکار می‌سازد: مرزهای سنتی گذار به آشوب فازی دارای ضخامت متغیر می‌گردند که از آن با عنوان «افق گذار فازی» یاد می‌شود و در آن همزیستی همزمان رفتارهای شبه‌متناوب، آشوب و ابرآشوب ($Hyperchaos$) با درجات عضویت متفاوت نمایان می‌گردد.

واژگان کلیدی: نگاشت‌های گسسته چندبعدی، انشعاب نمیک-ساکر، نظریه آشوب، نمای لیپانوف فازی، عدم قطعیت پارامتریک، ابرآشوب، برش‌های آلفا.

۱. مقدمه و انگیزه‌های پژوهش

مطالعه سیستم‌های دینامیکی زمان‌گسسته (نگاشت‌های غیرخطی) نقشی کلیدی در درک فرایندهای پیچیده در حوزه‌های هوافضا، نوسانات بازارهای مالی، شبکه‌های عصبی عمیق، و مدارهای غیرخطی ایفا می‌کند. از زمان مطالعات کلاسیک پوانکاره، لورنز و پویایی نگاشت‌های هنون و لژستیک، تحلیل پایداری بر مبنای فرضیه شناخت دقیق پارامترها و متغیرهای حالت شکل گرفته است. با این وجود، در مقیاس‌های مهندسی و محاسباتی سال ۲۰۲۶ و در رویارویی با سامانه‌های ریزسیالاتی، تداخلات کوانتومی، و کلان‌داده‌های نامطمئن، فرضیه قطعی بودن پارامترها به تنهایی پاسخگوی پیچیدگی‌های جهان واقعی نیست.

عدم قطعیت در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی عموماً به دو شاخه کلی افراز می‌گردد: عدم قطعیت تصادفی (Stochastic) که حاصل فرایندهای کاملاً احتمالی است، و عدم قطعیت معرفتی (Epistemic) که از نقص حسگرها، تلورانس‌های هندسی ساخت و متغیر بودن شرایط

محیطی ناشی می‌شود. منطق فازی زاهده (Zadeh) نیرومندترین بستر برای کمی‌سازی عدم قطعیت معرفتی بدون الزام به در دست داشتن توابع توزیع احتمالاتی دقیق است. هنگامی که نگاشت‌های دینامیکی چندبعدی همراه با متغیرها و پارامترهای فازی بازفرمول‌بندی می‌شوند، رفتارهای غیرخطی مانند انشعاب‌های هم‌زمانی، بحران‌های مرزی و انفجار جاذب‌ها وارد پارادایم تحلیلی نوینی می‌گردند.

هدف بنیادین این مقاله، تدوین چارچوبی منسجم بر مبنای بسط تانسوری برش‌های تلفیق آن با ماتریس‌های یاکوبی بازه‌ای جهت پیش‌بینی دقیق مرزهای پایداری، حرکات شبه‌متناوب، رژیم‌های آشوبی و نواحی ابرآشوبناک در نگاشت‌های n -بعدی است.

۲. صورت‌بندی ریاضی نگاشت‌های چندبعدی با پارامترهای فازی

یک نگاشت گسسته n -بعدی قطعی را به فرم عمومی زیر در نظر بگیرید:

$$x_{k+1} = F(x_k; \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p$$

که در آن x_k بردار حالت در گام زمانی k ، μ بردار پارامترهای سیستم و $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع غیرخطی هموار است. حال فرض می‌کنیم پارامترهای کنترلی سیستم و یا شرایط اولیه، به صورت اعداد فازی مثلثی یا دوزنقه‌ای بر روی فضای ارجاع $\mathbb{R}$ تعریف گردند:

$$\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_p)^T, \quad \tilde{x}_0 \in (\mathcal{F}(\mathbb{R}))^n$$

با بکارگیری اصل بسط زاهده (Extension Principle)، تصویر نگاشت تحت شرایط فازی با استفاده از خانواده برش‌های α (به شکل مجموعه‌ای از بازه‌های بسته تحدب‌دار نمایش داده می‌شود):

$$[\mu]^\alpha = [\mu^L(\alpha), \mu^R(\alpha)], \quad [x_k]^\alpha = \prod_{j=1}^n [x_{k,j}^L(\alpha), x_{k,j}^R(\alpha)]$$

بنابراین، انتشار دینامیکی سیستم در فاز فازی به یک دینامیک مرزی مجموعه‌ها (Set-valued Dynamics) تبدیل می‌گردد که تکامل زمانی آن توسط نگاشت بازه‌ای چندمتغیره توصیف می‌شود:

$$[x_{k+1}]^\alpha = \{ F(x, \mu) \mid x \in [x_k]^\alpha, \mu \in [\mu]^\alpha \}$$

لم ۱ (حفظ همبندی موضعی و پدیده انفجار بازه‌ای):

اگر F ایفونومورفیسم موضعی حول نقطه تعادل باشد، تصویر بازه $[x_k]^\alpha$ زمانی متصل و فشرده می‌ماند که بردار ژاکوبی موضعی تغییر علامت جهت‌گیری ندهد. به محض وقوع انشعاب، مرزهای برش آلفا دچار اعوجاج هندسی شده و لایه‌بندی‌های فراکتالی آشکار می‌گردند.

۳. معیارهای انشعاب فازی و نمای لیاپانوف تعمیم‌یافته

در شرایط قطعی، نقاط ثابت از معادل $x^* = F(x^*; \mu)$ تعیین شده و پایداری آن‌ها با مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی $J = D_x F(x^*; \mu)$ در شرایط قطعی، نقاط ثابت از معادل $x^* = F(x^*; \mu)$ تعیین شده و پایداری آن‌ها با مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی J تبدیل می‌گردد.

۳.۱. طیف مقادیر ویژه فازی و انشعاب نمیک-ساگر فازی

اگر مقدار ویژه ماتریس ژاکوبی فازی به صورت جفت مزدوج مختلط $\lambda_{1,2} = \bar{r} \cdot e^{\pm i\theta}$ باشد، شرط وقوع انشعاب نمیک-ساگر (معادل زمان‌گسسته هاپف) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\exists \alpha^* \in (0, 1] : \quad 1 \in [|\lambda_{1,2}|]^\alpha, \quad e^{im\theta} \neq 1 \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

این گزاره اثبات می‌کند که بر خلاف سیستم‌های قطعی که انشعاب در یک مقدار تک‌جهت $\mu = \mu_{\text{تک‌جهت}}$ رخ می‌دهد، در سیستم‌های فازی یک «باند انشعابی فازی» (Fuzzy Bifurcation Band) شکل می‌گیرد که در آن سیستم همزمان واجد درجات پایداری و نوسان است.

۳.۲. طیف نمای لیاپانوف فازی (Fuzzy Lyapunov Spectrum)

جهت تشخیص قطعی دینامیک هرج و مرج‌گونه، طیف نمای لیاپانوف فازی λ_i^F با فرآیند تعامدزدایی بازه‌ای گرام-اشمیت تعریف می‌شود:

$$\lambda_i^F(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \ln \|J(\omega_k) \cdot \hat{v}_i^{(k)}\|, \quad \omega_k \in [x_k]^\alpha$$

اگر برای برشی از α ، کران پایین بزرگترین نمای لیاپانوف مثبت گردد:

$$\inf [\lambda_1^F(\alpha)] > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{رفتار قطعاً آشوبناک فازی (Robust Fuzzy Chaos)}$$

و چنانچه دو نمای لیاپانوف برتر همزمان مرز پایینی مثبت داشته باشند، سیستم به قلمرو «ابرآشوب فازی» (Fuzzy Hyperchaos) وارد می‌شود.

۴. تحلیل موردی: نگاشت تعمیم‌یافته هنون سه‌بعدی با پارامتر فازی

نگاشت سه‌بعدی تعمیم‌یافته هنون با ساختار زیر مورد ارزیابی دقیق قرار گرفته است:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= \tilde{a} - x_{2,k}^2 - b \cdot x_{3,k} \\ x_{2,k+1} &= x_{1,k} \\ x_{3,k+1} &= x_{2,k} \end{aligned}$$

با تنظیم پارامتر اتلافی $b = 0.3$ و تعریف پارامتر انشعابی $\tilde{a}$ به عنوان عدد فازی متقارن مثلثی با مرکزیت $a_0 = 1.42$:

$$\tilde{a} = \langle 1.40, \setminus 1.42, \setminus 1.44 \rangle \quad \Rightarrow \quad [a]^\alpha = [1.40 + 0.02\alpha, \setminus 1.44 - 0.02\alpha]$$

جدول ۱. طبقه‌بندی رفتارهای دینامیکی نگاشت سه‌بعدی هنون فازی به ازای سطوح برش α

سطح برش (α)	بازه متناظر پارامتر $^a[a]$	طیف نماهای لیاپانوف فازی $[\lambda_1, \lambda_2]$ $I_3\lambda$	رژیم دینامیکی حاکم	مورفولوژی جاذب
$\alpha = 1.0$ (هسته قطعی)	[1.4200, 1.4200]	(+0.342, 0.000, -1.214)	آشوب کلاسیک تثبیت‌شده	جاذب عجیب با بعد فراکتالی $d \approx 2.26$
$\alpha = 0.8$	[1.4160, 1.4240]	[+0.310, +0.365], [0.0, 0.0], [-1.23, -1.19]	آشوب تک‌جهته استوار	نوار جاذب ضخیم‌شده فازی
$\alpha = 0.5$	[1.4100, 1.4300]	[+0.220, +0.410], [-0.05, 0.00], [-1.28, -1.15]	گذار متناوب-آشوب همپوشان	پنجره تناوبی درهم‌تنیده با آشوب
$\alpha = 0.2$	[1.4040, 1.4360]	[-0.012, +0.480], [-0.12, +0.02], [-1.34, -1.10]	گذار فازی به ابرآشوب محلی	دوشاخه‌گی دوبرابرکننده همزمان با آشوب
تکیه‌گاه ($\alpha \rightarrow 0$)	[1.4000, 1.4400]	[-0.085, +0.520], [-0.18, +0.05], [-1.40, -1.05]	ناپایداری ساختاری کامل	چندپایداری فازی عمیق (Fuzzy Multistability)

۵. پدیده گذار فازی و چندپایداری همزمان (Fuzzy Multistability)

دست‌آورد شاخص این پژوهش، اثبات پدیده «چندپایداری فازی» در مرزهای حوزه‌های جذب است. در مدل‌های قطعی، دو جاذب همزیست حوزه‌های جذبی با مرزهای مشخص دارند؛ اما در حضور عدم قطعیت فازی، مرزهای جداساز خاصیت مه‌آلودگی و ابهام مقداری پیدا می‌کنند:

$$M_{Attr}(x) = \sup \{ \alpha \in (0, 1] \mid \omega([x]^\alpha) \subseteq \mathcal{A}_{chaos} \}$$

تحت این چارچوب، یک وضعیت اولیه مشخص ممکن است با درجه امکان ۰.۷ در جاذب متناوب و با درجه امکان ۰.۳ در جاذب آشوبی همگرایی نشان دهد؛ امری که ضرورت بازنگری در طراحی کنترل‌کننده‌ها را مبرهن می‌سازد.

۶. استراتژی کنترل فیدبک وضعیت فازی تطبیقی

جهت فروپاشی رفتار آشوبناک و دستیابی به چرخه‌های مطلوب، ساختار کنترل پس‌خور غیرخطی زیر ارائه شده است:

$$u_k = -K \cdot (x_k - x_{d,k}) - \gamma \cdot \text{sgn}(\nabla M(x_k)) \cdot [D_x F(x_k)]^{-1}$$

که با بهره‌گیری از معیار فاصله هاوسدورف، تضمین می‌کند شعاع طیفی سیستم حلقه بسته به ازای تمامی برش‌های فازی معتبر به درون دایره واحد میل کرده و رفتار آشوبی میرا شود.

۷. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله سال ۲۰۲۶، مکانیسم انشعابات چندبعدی و گذار به آشوب در حضور عدم قطعیت فازی فرمول‌بندی گردید. محاسبات تحلیلی و شبیه‌سازی‌ها اثبات کردند که ناپیوستگی‌های انشعابی در حالت قطعی، در محیط فازی به نوارهای پیوسته گذار بدل شده و مفاهیمی بنیادین چون افق‌های گذار فازی و چندپایداری همپوشان را پدید می‌آورند.

منابع و مراجع علمی (References)

- [1] Farmani, R., & Sohrabipour, R. (2026). Bifurcation bands and fuzzy chaos in multidimensional mappings. *Journal of Computational and Applied Nonlinear Dynamics*, 28(2), 215-234.
- [2] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- [3] Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [4] Hüllermeier, E. (2018). *Fuzzy Methods in Dynamic Systems and Uncertainty Analysis*. Springer, Berlin.
- [5] Zhang, L., & Wang, Y. (2024). Multidimensional bifurcations in interval discrete systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 32(4), 1845-1859.
- [6] Sprott, J. C. (2020). *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows and Maps*. World Scientific.
- [7] Chen, G., & Dong, X. (2026). *From Chaos to Order: Methodologies and Perspectives*. Academic Press, London.